

תוכן העניינים:

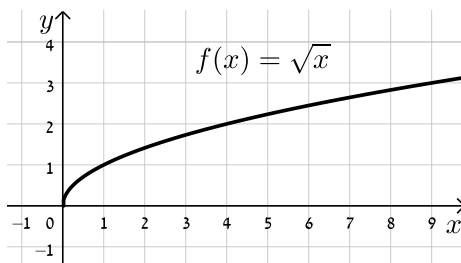
2	חשבון דיפרנציאלי
2	פונקצית השורש
2	מבוא לפונקציות עם שורשים
2	סיכום כללי
3	שאלות
4	תשובות סופיות
5	הנגזרת של פונקצית השורש
5	סיכום כללי
5	שאלות
5	תשובות סופיות
6	משיקים לפונקציות עם שורשים
6	סיכום כללי
6	שאלות
8	תשובות סופיות
9	חקירה של פונקציות עם שורשים
9	סיכום כללי
10	שאלות
12	תשובות סופיות
13	שאלות עם פרמטרים
13	שאלות
13	תשובות סופיות

חשבון דיפרנציאלי פונקצית השורש

מבוא לפונקציות עם שורשים:

סיכום כללי:

הצורה הכללית של פונקצית השורש:



תחום ההגדרה של פונקצית השורש היסודית:

תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ הוא $x \geq 0$.

אנו נעסוק בפונקציות הכוללות את הביטוי השורשי היסודי \sqrt{x} בלבד!

עקרונות בפתרון משוואות עם שורשים:

כדי לפתור משוואה הכוללת את הביטוי \sqrt{x} נבצע:

- (1) בידוד האיבר \sqrt{x} (ניתן גם לבודד אותו עם מקדם מספרי, למשל: $3\sqrt{x}$)
- (2) העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה.
- (3) מציאת x (לעיתים ייתכן פתרון בודד ולעיתים יתכנו מספר פתרונות).
- (4) בדיקה של ערך/ערכי ה- x ע"י הצבה במשוואה לפני ההעלאה בריבוע.

הערה:

במקרים מסוימים בהם יתקבל פתרון יחיד, נדלג על הבדיקה (שלב 4).

שאלות:

חזרה על טכניקה בפתרון משוואות עם שורשים:

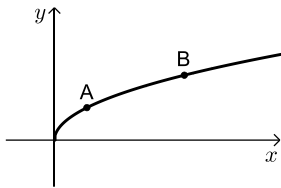
(1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\sqrt{x} = 5$	ב. $\sqrt{x} - 1 = 3$
ג. $\sqrt{2x} = 3$	ד. $2\sqrt{x} = 14$
ה. $2\sqrt{x} - 1 = 0$	ו. $3\sqrt{x} - 28 = 2$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x - \sqrt{x} = 0$	ב. $3x - 6\sqrt{x} = 0$
ג. $\frac{4}{\sqrt{x}} = 1$	ד. $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2$

(3) בציור הבא מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ ועליו נקודות A ו-B.



- א. ידוע כי שיעור ה- x בנקודה A הוא 1. מה הוא שיעור ה- y של הנקודה A?
- ב. שיעור ה- x של הנקודה B הוא 9. כתוב את שיעורי הנקודה B.

ג. קבע אלו מבין הנקודות הבאות יכול להימצא על גרף הפונקציה $f(x)$:

(1) $C(6,12)$

(2) $D(49,7)$

(3) $E(-4,16)$

ד. מצא את שיעורי הנקודה F אם ידוע כי שיעור ה- y שלה הוא 9.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = 6 - \sqrt{x}$.

מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2\sqrt{x} - 8x$.

מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

תשובות סופיות:

(1) א. $x = 25$ ב. $x = 16$ ג. $x = 4.5$ ד. $x = 49$

ה. $x = \frac{1}{4}$ ו. $x = 100$

(2) א. $x = 0,1$ ב. $x = 0,4$ ג. $x = 16$ ד. $x = \frac{1}{16}$

(3) א. $y_A = 1$ ג. $B(9,3)$ ג. רק נקודה $D - (2)$ ד. $F(81,9)$

(4) $(0,6)$, $(36,0)$

(5) $(0,0)$, $\left(\frac{1}{16}, 0\right)$

הנגזרת של פונקצית השורש:

סיכום כללי:

כלל הגזירה של פונקצית השורש:

הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ היא: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x}$

ג. $f(x) = 3x - \sqrt{x}$

ה. $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x}$

ב. $f(x) = -3\sqrt{x}$

ד. $f(x) = 4\sqrt{x} + 4x + 3$

ו. $f(x) = \frac{1}{6}\sqrt{x} - \frac{1}{3}x^2$

תשובות סופיות:

1) א. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ג. $f'(x) = 3 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ה. $f'(x) = 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

ב. $f'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}}$

ד. $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 4$

ו. $f'(x) = \frac{1}{12\sqrt{x}} - \frac{2}{3}x$

משיקים לפונקציות עם שורשים:

סיכום כללי:

כדי למצוא משוואת משיק לגרף פונקציה נעזר בערך הנגזרת בנקודת ההשקה על מנת למצוא את שיפוע המשיק, כפי שראינו בעבר.

במידה והשיפוע נתון, נחבר משוואה מהצורה: $f'(x) = m$ ונמצא את ערך ה- x של נקודת ההשקה.

שאלות:

שאלות עם מציאת ערך הנגזרת ושיפוע הפונקציה בנקודה:

(1) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2\sqrt{x}$.

א. מצא את נגזרת הפונקציה.

ב. חשב את ערך הנגזרת בנקודה שבה $x = 9$.

ג. חשב את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.

(2) חשב את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = 2 + \sqrt{x}$ בנקודה שבה $x = 4$.

(3) מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = 4x - 8\sqrt{x}$ בנקודה שבה $x = 9$.

שאלות עם מציאת נקודה לפי שיפוע:

(4) מצא נקודה על גרף הפונקציה: $f(x) = 6x - 2\sqrt{x}$ שבה: $f'(x) = 5$.

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2 + 3\sqrt{x}$.

מצא את ערך ה- x של נקודה על גרף הפונקציה המקיימת: $f'(x) = \frac{1}{2}$.

(6) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4\sqrt{x} - x - 3$.

מצא את הנקודה שבה שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא 1.

שאלות עם מציאת משוואת משיק לפי שיפוע ונקודה:

(7) כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = 6\sqrt{x}$ בנקודה שבה $x = 4$.

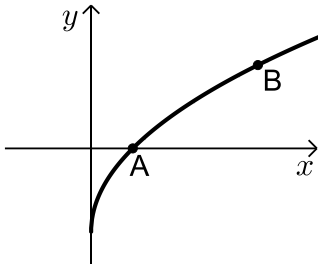
(8) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{4} + 4\sqrt{x}$.

מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.

(9) לגרף הפונקציה: $f(x) = 3x - 8\sqrt{x}$ מעבירים משיק ששיפועו 2.

א. מצא את שיעורי נקודת ההשקה.

ב. כתוב את משוואת המשיק.



(10) בצויר מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 2\sqrt{x} - 2$.

מסמנים שתי נקודות A ו-B על גרף הפונקציה

כך ש-A היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x

ושיעור ה-x של הנקודה B הוא 4.

א. מצא את הנקודה A.

ב. מצא את הנקודה B.

ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה

העוברים דרך הנקודות A ו-B.

ג. המשיקים שמצאת בסעיף הקודם נחתכים בנקודה P.

מצא את שיעורי הנקודה P.

תשובות סופיות:

א. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ א. $\frac{1}{3}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. 1

א. $m = \frac{1}{4}$ ב. $m = \frac{1}{4}$

א. $m = 2\frac{2}{3}$ ב. $m = 2\frac{2}{3}$

א. (1,4) ב. (1,4)

א. $x = 9$ ב. $x = 9$

א. (1,0) ב. (1,0)

א. $y = 1.5x + 6$ ב. $y = 1.5x + 6$

א. $y = 2.25x + 2$ ב. $y = 2.25x + 2$

א. (16,16) ב. $y = 2x - 16$

א. (1,0) ב. $y = \frac{1}{2}x$; $y = x - 1$ ג. B(4,2) ד. A(1,0) ה. (10)

א. P(2,1) ב. P(2,1)

חקירה של פונקציות עם שורשים:

סיכום כללי:

שלבי החקירה של פונקצית השורש:

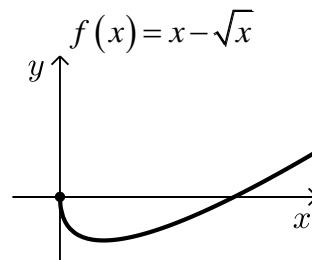
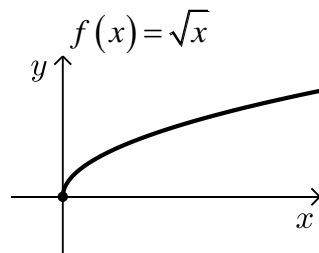
- (1) מציאת תחום ההגדרה.
- (2) מציאת נקודות הקיצון וקביעת סוגן.
- (3) כתיבת תחומי העלייה והירידה.
- (4) מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- (5) סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

הערות:

- בשאלות שונות נקבל סעיפי חקירה חלקיים או מלאים (תלוי בשאלה) ולעיתים ייתכן גם שילוב של חקירה חלקית ושימוש במשיקים.
- בשאלות מסוימות לא נדרש לצייר סקיצה של גרף הפונקציה אלא לבחור סקיצה נכונה מבין מספר אפשרויות. במקרים אלו נבחן את תוצאות סעיפי החקירה ונאתר את הסקיצה הנכונה.

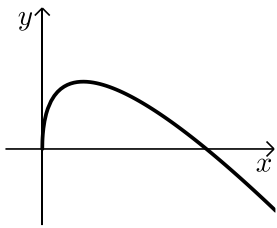
נקודות קיצון קצה ונקודות קיצון מקומיות:

פונקציות עם שורשים מהצורה \sqrt{x} כוללות תחום הגדרה שהוא $x \geq 0$. במקרים אלו נבחין כי הפונקציה 'מתחילה' מהנקודה שבה $x = 0$ ומתקדמת עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .



- נקודת ההתחלה נקראת **נקודת קיצון קצה** של הפונקציה או: **קיצון קצה**.
- מקסימום קצה: נקודה אשר הפונקציה מתחילה ממנה ויורדת אחריה.
 - מינימום קצה: נקודה אשר הפונקציה מתחילה ממנה ועולה אחריה.

שאלות:



1) בציור הבא מתוארת הפונקציה: $f(x) = 12\sqrt{x} - x$.

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מהן נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצה)?
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

2) מצא את נקודות המקסימום והמינימום (המקומיות וקיצון הקצה) של הפונקציות הבאות. פרט בכל פונקציה אלו נקודות הן מקומיות ואלו נקודות הן קצה.

א. $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{x}{8} + 2$

ב. $f(x) = x^2 - 4\sqrt{x}$

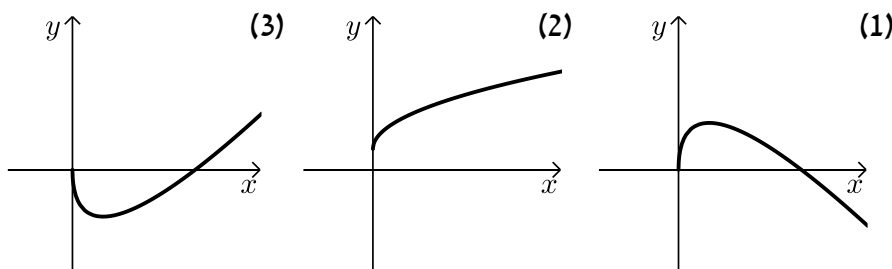
ג. $f(x) = \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{x} - 1$

3) נתונה הפונקציה: $f(x) = 3\sqrt{x} - 6$.

- מה הוא תחום הגדרה של הפונקציה?
- כתוב את נגזרת הפונקציה.
- האם יש לפונקציה נקודת קיצון (פנימית)? אם כן מצא אותה.
- הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרה.

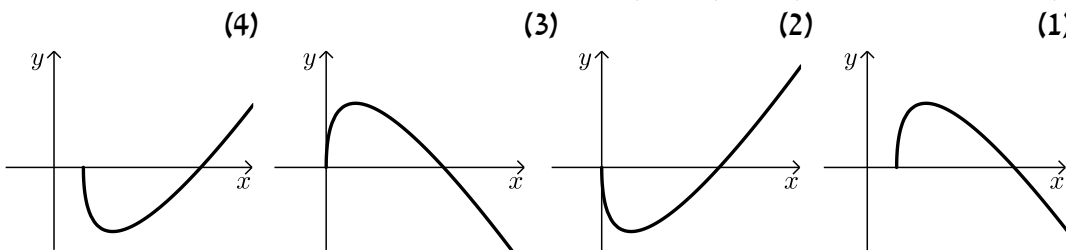
4) נתונה הפונקציה: $f(x) = x - 3\sqrt{x}$.

- כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה וקבע את סוגה.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- לפניך 3 סקיצות (1)-(3) של פונקציות שונות. קבע איזו מהן מתאימה לפונקציה $f(x)$.



5 נתונה הפונקציה: $f(x) = 12\sqrt{x} - 3x$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- לפניך רשימה של נקודות על ציר ה- x : $(0,0)$, $(4,0)$, $(16,0)$, $(144,0)$. קבע אלו מהן נמצאות על גרף הפונקציה $f(x)$. נמק.
- מצא את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.
- רשום את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- אחד מן הגרפים (1)-(4) שלפניך מתאר את גרף הפונקציה $f(x)$. קבע איזה מהם ונמק את קביעתך.



6 נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x - 8\sqrt{x} + 9$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- מצא את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- האם גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x ? נמק.
- קבע בכמה נקודות כל אחד מהישרים הבאים חותך את גרף הפונקציה $f(x)$.
 - הישר: $y = -1$.
 - הישר: $y = 10$.
 - הישר: $y = 1$.

תשובות סופיות:

(1) א. $x \geq 0$ ב. $\min(0,0)$ קצה, $\max(36,36)$

ג. עולה: $0 < x < 36$, יורדת: $x > 36$. ד. $(0,0)$, $(144,0)$.

(2) א. $\min(0,2)$ קצה, $\max(64,10)$ ב. $\max(0,0)$ קצה, $\min(1,-3)$

ג. $\max(0,-1)$ קצה, $\min\left(\frac{1}{36}, -1\frac{1}{24}\right)$ (מקומי).

(3) א. $x \geq 0$ ב. $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$ ג. (1) אין נקודות קיצון פנימיות.

ג. (2) הוכחה.

(4) א. $x \geq 0$ ב. $\min\left(2\frac{1}{4}, -2\frac{1}{4}\right)$ ג. עולה: $x > 2\frac{1}{4}$, יורדת: $0 < x < 2\frac{1}{4}$

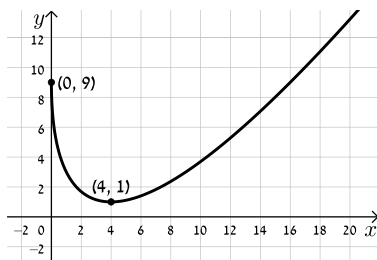
ד. $(0,0)$, $(9,0)$ ה. סקיצה (3).

(5) א. $x \geq 0$ ב. $(0,0)$ ו- $(16,0)$ ג. $\max(4,12)$

ד. עולה: $0 < x < 4$, יורדת: $x > 4$ ה. סקיצה (3).

(6) א. $x \geq 0$ ב. $\min(4,1)$ ג. עולה: $x > 4$, יורדת: $0 < x < 4$

ד. $(0,9)$ ה. להלן סקיצה:



ו. לא.

ז. i. 0 נקודות, ii. נקודה אחת, iii. נקודה אחת.

שאלות עם פרמטרים:

שאלות:

(1) לגרף הפונקציה: $f(x) = ax + \sqrt{x}$ מעבירים משיק בנקודה שבה $x = 4$ ושיפועו הוא 1.

- א. מצא את ערך הפרמטר a .
ב. כתוב את משוואת המשיק.

(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2\sqrt{x} + bx$, b הוא פרמטר. ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון פנימית עבור $x = 1$.

- א. מצא את b .
ב. כתוב את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית.
ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת הקיצון.

תשובות סופיות:

(1) א. $a = \frac{3}{4}$ ב. $y = x + 1$

(2) א. $b = -1$ ב. $(1, 1)$ ג. $y = 1$